ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Элементы комбинаторики, теории множеств и математической логики

Основное содержание:
Операции над множествами. Число элементов множества

Ход занятия

Теоретический материал

Операции над множествами

Определение *Объединением элементов двух множеств A и B называется множество всех элементов этих множеств, каждый из которых является элементом A или элементом B, или принадлежит и тому, и другому множеству одновременно.*

Обозначается объединение множеств следующим образом:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } x \in A \text{ и } B\}.$$

Графически объединение множеств можно изобразить

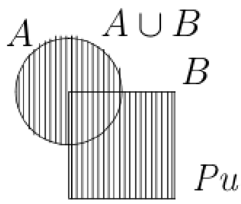


Рис. 6.1

На рисунке заштриховано объединение элементов множеств A и B, содержащих общие элементы.

Например, если множество A состоит из тех, кто знает английский язык, а множество B — из тех, кто знает немецкий язык, то объединение $A \cup B$ включает как тех, кто знает только английский или только немецкий, так и тех, кто знает оба эти языка.

Определение *Объединение элементов множеств A и B, не имеющих общих элементов, называется суммой множеств и обозначается*

$$A + B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

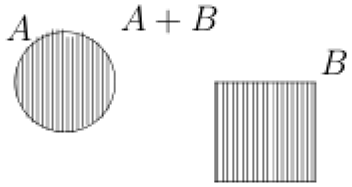


Рис. 6.2

Так, если элементами множества A являются знающие только английский язык, а элементами множества B – знающие только немецкий, то суммой множеств $A + B$ является множество знающих только один иностранный язык.

На рисунке 6.2заштриховано объединение элементов множеств A и B, не имеющих общих элементов.

Определение *Пересечением множеств элементов A и B называется множество общих элементов этих множеств.*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Графически пересечение множеств можно изобразить так

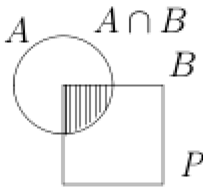


Рис. 6.3

В приведённом примере со знанием языков пересечением множеств является множество людей, знающих одновременно английский и немецкий языки.

Определение *Произведением множеств элементов A и B называется множество пар элементов $(a; b)$, в которых $a \in A$, а $b \in B$,* то есть

$$AB = \{(a; b) : a \in A, b \in B\}.$$

Если, например, элементами множества A знающие только английский язык, а элементами множества B – знающие только немецкий, то можно образовать произведение множеств AB как множество пар, в каждой из которых один знает только английский, а другой – только немецкий.

Определение *Разностью множеств элементов A и B называется множество тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B,* то есть

$$A \setminus B = \{a : a \in A, a \notin B\}.$$

Графически разность множеств $A \setminus B$ можно изобразить так

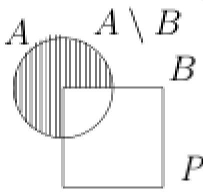


Рис. 6.4

В примере с языками разность множеств представляет множество знающих английский язык, но не знающих немецкий.

Предположим, что Ω — представляет *универсальное множество* всех изучаемых элементов, а $\emptyset$ — *пустое множество*, то есть множество не содержащее ни одного элемента. С помощью этих множеств можно дать следующее

Определение *Дополнением множества A (до универсального множества Ω) называется множество всех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству A*, то есть

$$\bar{A} = \{x : x \in \Omega, x \notin A\}.$$

Например, в ситуации с языками $\bar{A}$ — множество людей, незнающих английский, а $\bar{B}$ — множество людей, незнающих немецкий.

Сформулируем несколько следствий из приведённых определений.

Следствие 1. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Следствие 2. $A + \bar{A} = \Omega$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Следствие 3. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Замечание .1. В дальнейшем нам понадобятся такие неопределяемые понятия как *опыт* или *эксперимент*.

Далее под опытом или экспериментом будем понимать *некоторую воспроизводимую совокупность физических условий, на фоне которых наступает изучаемое явление, фиксируется тот или иной результат.*

Опыт или эксперимент представляют некоторое универсальное множество Ω, элементами которого являются ω *исходы опыта* (или ω *исходы эксперимента*). При этом исходы будут делиться на *благоприятные* исходы и *неблагоприятные* исходы. Благоприятные исходы будут образовывать *изучаемые события*, которые будут обозначаться прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ... Таким образом, событие A можно определить как подмножество исходов ω некоторого опыта Ω, то есть

$$A = \{\omega\} \subseteq \Omega.$$

С помощью данных определений и следствий обратимся к изучению комбинаторики, в основе которой лежат два правила — *правило суммы* и *правило произведения.*

Контрольные вопросы

1. Понятие множества.
2. Назовите основные способы задания множеств.
3. Сформулируйте определение операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметричная разность и дополнение.

Практический материал

Пример 1. Даны два множества: $A = \{2; 6; 8; 10; 14\}$ и $B = \{-2; 6; 8; 14; 18\}$. Найти $A \cup B$ и $B \cap A$.

Решение:

Используя определения операций объединения и пересечения, запишем:

$A \cup B = \{-2; 2; 6; 8; 10; 14; 18\}$

$B \cap A = \{6; 8; 14\}$.

Пример 2. Даны два множества: $A = \{1; 4; 8; 10; 12\}$ и $B = \{2; 6; 10; 11\}$. Найти B / A и $A \Delta B$.

Решение:

Используя определения операций разности и симметричной разности, запишем:

$B \setminus A = \{2; 6; 11\}$

$A \Delta B = \{1; 2; 6; 8; 11; 12\}$.

Пример 3. Дано множество $X = \{x : x \in Q\}$ (Q – рациональные числа). Найти дополнение к множеству X. Универсальное множество U – множество действительных чисел.

Решение:

Из материала лекции №2 следует, что действительные числа представляют собой совокупность рациональных и иррациональных чисел. Таким образом, дополнением к множеству X будет являться множество иррациональных чисел:

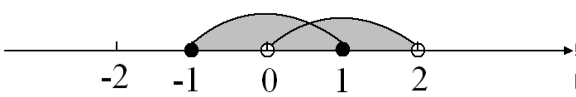
$\overline{X} = R \setminus X = \{y : y \in K\}$ (K – иррациональные числа).

Пример 4. Даны множества на числовой прямой A=$[-1,1]$; B=$(-\infty,0)$; C=$(0,2)$. Найти следующие множества: $A \cup C$; $A \cap B$; $(A \cup B) \cap C$ и изобразить их на числовой оси.

Решение:

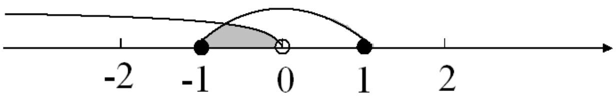
Множество $A \cup C$ состоит из точек числовой прямой, которые принадлежат либо множеству A, либо множеству C:

$A \cup C = [-1, 2)$.



Множество $A \cap B$ состоит из точек числовой прямой, которые принадлежат одновременно и множеству A и множеству B.

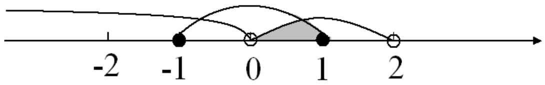
$A \cap B = [-1, 0)$.



Множество $(A \cup B) \cap C$ состоит из точек числовой прямой, которые принадлежат одновременно множеству $A \cup B$ и множеству C. Построим множество $A \cup B$:

$A \cup B = (-\infty, 1]$.

Построим множество $(A \cup B) \cap C = (0, 1]$.



Задачи для самостоятельного решения

1. Равны ли множества:

а) $A = \{2, 4, 5\}$ и $B = \{2, 4, 2, 5\}$; б) $A = \{1, 2\}$ и $B = \{\{1, 2\}\}$.

2. Перечислите элементы следующих множеств:

а) множество всех двухзначных натуральных чисел, делящихся на 5, но не делящихся на 10;

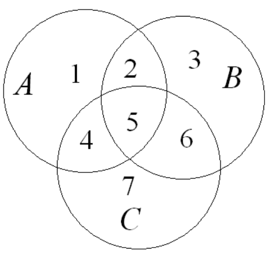
б) множество всех чисел от 0 до 30, которые можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3. Даны два множества: $A = \{1; 2; 3; 11\}$ и $B = \{2; 6; 8;\ 18\}$. Найти $A \cap B$ и $B \setminus A$.

4. Даны два множества: $A = \{a; b; c; d; e; q\}$ и $B = \{a; l; k; c\}$. Найти $A \cup B$ и $A \Delta B$.

5. Даны множества на числовой прямой A, B и C. Найти множества $A \cup C$; $A \cap B$; $(A \cap B) \cup C$ и изобразить их на числовой оси: $A = [-3, -1]$, $B = (-\infty, -2)$, C=$[-2, 0)$.

6. Пусть A – множество натуральных чисел кратных 2, B – множество натуральных чисел кратных 5. Универсальное множество – множество натуральных чисел. Описать множества: а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $\overline{A \cup B}$, г) $\overline{A} \cap B$.



7. На диаграмме Эйлера-Вена изображены множества A, B и C. Какие области соответствуют следующим множествам: а)

$A \cap B \cap C$; б) $(A \cup B) \cap C$; в) $(A \setminus B) \cap C$; г) $(A \cup C) \setminus B$; д) $(A \cap B) \cup C$; е) $(C \setminus A) \cup B$; ж) $C \setminus (B \cap A)$

8. Опишите каждое из следующих множеств, используя подходящее свойство:

а) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

б) {3, 6, 9, 12, 15};

в) {1, 4, 9, 16, .25};

г) {10, 12, 14, 16};

д) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29};

е) {-1, +1}.

9. Пусть A – множество целых чисел, кратных 2; B – множество целых чисел, кратных 3; U – множество целых чисел. Описать множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Турецкий, В. Я. Математика и информатика. [Текст] : учеб. пособие / В. Я. Турецкий, М. : ИНФРА, 2005. – 560 с.

Дополнительная литература

2. Филимонова, Е. В. Математика и информатика [текст]: учебник / Е. В.Филимонова. – М.: Издательско-толговая корпорация «Дашков и К°», 2007. – 480 с.

3. Воронов, М. В. Математика для студентов гуманитарных факультетов [Текст]: учебник / М. В. Воронов, Г. П. Мещерякова. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2002.

Другие источники информации и средства обеспечения освоения дисциплины

4. Интернет http://www.ph4s.ru