

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Элементы комбинаторики, теории множеств и математической логики

Основное содержание:

Логические операции. Построение таблиц истинности. Решение логических задач

Ход занятия

Теоретический материал

Основные понятия.

- 1 Логика – наука о законах и формах мышления
- 2 Высказывание (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно
- 3 Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть
- 4 Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом
- 5 Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение
- 6 Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)
- 7 Сложное логическое выражение – логическое выражение, составленное из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.
- 8 Алгебра логики – это наука об общих правилах и законах действий над логическими переменными и высказываниями.
- 9 Самой простой логической операцией является операция НЕ, по-другому ее часто называют отрицанием, дополнением или инверсией и обозначают NOT (). Если A – истинно, то $\bar{A}$ – ложно и наоборот. Результат отрицания всегда противоположен значению аргумента. Логическая операция НЕ является унарной, т.е. действие выполняется над одним операндом. Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

10 Логическое И еще часто называют конъюнкцией, или логическим умножением, а ИЛИ – дизъюнкцией, или логическим сложением. Операция И (обозначается «И», «and», «&», $A \cdot B$) имеет результат «истина» только в том случае, если оба ее операнда истинны. Таблица истинности $F = A \wedge B$:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

11 Операция ИЛИ (обозначается «ИЛИ», «or», $A+B$, $A \vee B$) называется дизъюнкцией или логическим сложением и дает «истину», если значение «истина» имеет хотя бы один из операндов. Разумеется, в случае, когда справедливы оба аргумента одновременно, результат по-прежнему истинный. Таблица истинности $F = A \vee B$:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используются операции импликация и эквивалентность.

12 Логическое следование: импликация – связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (A), а второе (B) – следствием из этого условия. Результатом импликации является ЛОЖЬ только тогда, когда условие A истинно, а следствие B ложно. Обозначается символом "следовательно" и выражается словами ЕСЛИ ... , ТО ... Таблица истинности $F = A \rightarrow B$:

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

13 Логическая равнозначность: эквивалентность – определяет результат сравнения двух простых логических выражений A и B. Результатом эквивалентности является новое логическое выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения одновременно истинны или ложны. Обозначается символом "эквивалентности". Таблица истинности $F = A \leftrightarrow B$:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

14 Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении: 1. инверсия $\rightarrow$ 2. Конъюнкция $\rightarrow$ 3. Дизъюнкция $\rightarrow$ 4. Импликация $\rightarrow$ 5. Эквивалентность

15 Для изменения указанного порядка выполнения операций используются круглые скобки.

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используется операция импликация и эквивалентность.

16 Штрих Шеффера, $A|B$ или антиконъюнкция, по определению это отрицание конъюнкции $F = A|B = \overline{A \wedge B}$:

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

17 Стрелка Пирса, $A \downarrow B$ или антидизъюнкция, по определению $F = A \downarrow B = \overline{A \vee B}$:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

18 Сумма по модулю два, $A \oplus B$ или антиэквивалентность, по определению $F = A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$.

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

19 Основные законы логики: $A = A$ – закон тождества

$A \& \bar{A} = 0$ – закон непротиворечия

$A \vee \bar{A} = 1$ – закон исключенного третьего

$\overline{\bar{A}} = A$ – закон двойного отрицания

– Свойства констант: $\bar{0} = 1$ $\bar{1} = 0$

$A \vee 0 = A$ $A \& 0 = 0$

$A \vee 1 = 1$ $A \& 1 = A$

– Законы идемпотентности: $A \vee A = A$; $A \& A = A$

– Законы коммутативности: $A \vee B = B \vee A$; $A \& B = B \& A$

– Законы ассоциативности: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$; $A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$

- Законы дистрибутивности: $A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$;
 $A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$
- Законы поглощения: $A \vee (A \& B) = A$; $A \& (A \vee B) = A$
- Законы де Моргана: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$; $\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Задание

1 Составить таблицу истинности сложного логического выражения

2 Для заданного логического выражения:

- построить таблицу истинности;
- упростить высказывание, используя равносильные преобразования;
- полученный результат проверить, построив для него таблицу истинности.

Пример выполнения:

1 Исходные данные:

$$F = A \vee \overline{B} \wedge C.$$

Решение:

1 Определим количество переменных – их 3, значит количество строк в таблице истинности $= 2^3 + 1 = 9$ (каждый операнд принимает одно из двух значений – 0 или 1)

2 Определим количество и порядок действий: 3 действия ($\partial 1 = \overline{B}$, $\partial 2 = \partial 1 \wedge C$ и $\partial 3 = A \vee \partial 2$), значит количество столбцов $= 3$ (3 переменные) + 3 (3 действия) = 6

3 Составляем таблицу истинности, вписывая в соответствующие ячейки результаты действий, используя правила алгебры логики, например, если $B = 1$, то $\overline{B} = 0$; $\partial 1 = 1$, $C = 1$, то $\partial 1 \wedge C = 1$ и т. д.

A	B	C	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

2 Исходные данные:

$$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \rightarrow (Z \rightarrow X).$$

Решение:

$$1 \quad \overset{\partial 1}{(X \rightarrow Y)} \wedge \overset{\partial 4}{(Y \rightarrow Z)} \rightarrow \overset{\partial 2}{(Z \rightarrow X)} \overset{\partial 5}{\rightarrow} \overset{\partial 3}{(Z \rightarrow X)}.$$

2 Составим таблицу истинности для исходного выражения:

X	Y	Z	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$	$\partial 4$	$\partial 5$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3 Упростим высказывание:

– преобразуем импликацию:

$$(X \rightarrow Y)(Y \rightarrow Z) \rightarrow (Z \rightarrow X) = (\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee Z) \vee (\overline{Z} \vee X);$$

– воспользуемся законом де Моргана для преобразования инверсии:

$$(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee Z) \vee (\overline{Z} \vee X) = (\overline{X} \vee Y) \vee (\overline{Y} \vee Z) \vee (\overline{Z} \vee X) = \overline{\overline{X} \vee Y} \vee \overline{\overline{Y} \vee Z} \vee \overline{\overline{Z} \vee X};$$

– по закону двойного отрицания:

$$\overline{\overline{X} \vee Y} \vee \overline{\overline{Y} \vee Z} \vee \overline{\overline{Z} \vee X} = X \overline{Y} \vee Y \overline{Z} \vee Z \overline{X};$$

– перегруппируем высказывание и воспользуемся законом поглощения:

$$X \overline{Y} \vee Y \overline{Z} \vee Z \overline{X} = X \overline{Y} \vee X \vee Y \overline{Z} \vee \overline{Z} = X \vee \overline{Z}$$

4 Составим таблицу истинности для полученного выражения:

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$X \vee \overline{Z}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Результирующие столбцы в двух таблицах совпали, следовательно, выполненные преобразования верны

Задания к практической работе.

Задание 1

- | | | | |
|----|---|----|--|
| 1 | $F = A \vee \bar{B} \vee (\bar{A} \vee C)$ | 16 | $F = A \leftrightarrow C \vee B \rightarrow A$ |
| 2 | $F = A \rightarrow \bar{B} \vee C$ | 17 | $F = A \leftrightarrow \bar{C} \vee B \rightarrow \bar{A}$ |
| 3 | $F = B \vee (\bar{A} \leftrightarrow C)$ | 18 | $F = (A \leftrightarrow C) \vee (B \rightarrow A)$ |
| 4 | $F = \bar{B} \vee (A \leftrightarrow C)$ | 19 | $F = A \leftrightarrow C \vee (B \rightarrow \bar{A})$ |
| 5 | $F = A \wedge B \rightarrow \bar{B} \wedge C$ | 20 | $F = A \leftrightarrow (C \vee B \rightarrow A)$ |
| 6 | $F = A \wedge B \leftrightarrow \bar{B} \vee C$ | 21 | $F = (\bar{A} \leftrightarrow C) \vee B \rightarrow A$ |
| 7 | $F = (A \vee \bar{B}) \vee (\bar{A} \rightarrow C)$ | 22 | $F = \bar{A} \leftrightarrow (C \vee \bar{B} \rightarrow A)$ |
| 8 | $F = (A \rightarrow \bar{B}) \vee C$ | 23 | $F = A \wedge (B \rightarrow \bar{C}) \wedge C$ |
| 9 | $F = B \vee C \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{C}$ | 24 | $F = A \wedge (B \leftrightarrow \bar{A}) \vee C$ |
| 10 | $F = \bar{B} \vee (A \wedge C \rightarrow B)$ | 25 | $F = (C \vee \bar{B}) \vee (\bar{A} \vee C)$ |
| 11 | $F = A \vee B \rightarrow \bar{B} \vee C$ | 26 | $F = A \rightarrow \bar{B} \vee (C \rightarrow B)$ |
| 12 | $F = A \wedge B \leftrightarrow \bar{B} \vee C$ | 27 | $F = (A \wedge B \rightarrow \bar{B}) \wedge (C \vee \bar{A})$ |
| 13 | $F = A \rightarrow \bar{B} \vee (\bar{A} \vee C)$ | 28 | $F = \bar{B} \vee (A \leftrightarrow C) \wedge C$ |
| 14 | $F = \bar{A} \wedge B \rightarrow \bar{B} \vee C$ | 29 | $F = A \wedge B \rightarrow \bar{B} \wedge C$ |
| 15 | $F = B \vee (\bar{A} \leftrightarrow C) \wedge A$ | 30 | $F = A \wedge B \leftrightarrow \bar{B} \vee C$ |

Задание 2

- | | | | |
|----|---|----|--|
| 1 | $(A \leftrightarrow B) \vee \bar{A} \bar{B} \vee C$ | 16 | $B \vee (A \leftrightarrow CB) \vee \bar{A} \bar{C}$ |
| 2 | $(A \rightarrow B) \vee \bar{A} \bar{C} \vee BC$ | 17 | $(AC \rightarrow B) \vee \bar{A} \bar{B} \bar{C}$ |
| 3 | $(AC \rightarrow B) \vee \bar{A} \bar{C}$ | 18 | $(\bar{A} \leftrightarrow C) \wedge (\bar{B} \bar{C} \rightarrow AB)$ |
| 4 | $\bar{A} \bar{B} \vee (A \leftrightarrow C) B$ | 19 | $(B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow AC)$ |
| 5 | $(\bar{A} \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \bar{C} \vee BC)$ | 20 | $(AB \rightarrow C) \vee A \vee \bar{A} \bar{C}$ |
| 6 | $(A \leftrightarrow C) \vee \bar{A} \bar{B} \vee AC$ | 21 | $(A \leftrightarrow C) \vee (\bar{A} \bar{B} \rightarrow C)$ |
| 7 | $(A \leftrightarrow C) \vee \bar{A} \bar{B} \vee BC$ | 22 | $(\bar{A} \bar{B} \rightarrow \bar{C}) \vee \bar{A} \bar{B} \bar{C}$ |
| 8 | $(C \leftrightarrow B) \vee \bar{A} \bar{C} \vee BC$ | 23 | $(AB \rightarrow C) \vee \bar{A} \bar{C}$ |
| 9 | $(BC \rightarrow A) \vee \bar{A} \bar{C}$ | 24 | $(\bar{A} \rightarrow BC) \wedge (A \leftrightarrow C)$ |
| 10 | $(AB \rightarrow C) \vee \bar{A} \bar{C}$ | 25 | $(\bar{A} \leftrightarrow B) \vee (A \rightarrow BC)$ |
| 11 | $(\bar{A} \rightarrow C) \wedge (\bar{B} \bar{C} \vee AB)$ | 26 | $(\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \wedge (\bar{C} \bar{A} \rightarrow B)$ |
| 12 | $(\bar{A} \leftrightarrow B) \wedge (A \rightarrow BC)$ | 27 | $(A \rightarrow \bar{B} \bar{C}) \vee \bar{A} \bar{B} \vee BC$ |
| 13 | $(B \rightarrow C) \vee \bar{A} \bar{B} \vee \bar{A} \bar{C}$ | 28 | $(A \rightarrow C) \vee \bar{A} \bar{B} \vee BC$ |
| 14 | $(A \rightarrow \bar{B} \bar{C}) \vee \bar{A} \bar{B} \vee \bar{B} \bar{C}$ | 29 | $(\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \wedge (\bar{B} \bar{A} \rightarrow C)$ |
| 15 | $(AC \rightarrow \bar{B}) \vee \bar{B} \bar{C}$ | 30 | $(AB \rightarrow \bar{C}) \vee \bar{A} \bar{B} \bar{C}$ |

Контрольные вопросы:

- 1 Что такое логика?
- 2 Что называется высказыванием?
- 3 Что такое утверждение?
- 4 Что называется рассуждением?
- 5 Что такое умозаключение?
- 6 Что такое логическое выражение?
- 7 Какие бывают логические выражения?
- 8 Что такое алгебра логики?
- 9 Понятие, обозначение и таблица истинности инверсии.
- 10 Понятие, обозначение и таблица истинности конъюнкции.
- 11 Понятие и обозначение и таблица истинности дизъюнкции.
- 12 Понятие, обозначение и таблица истинности импликации.
- 13 Понятие, обозначение и таблица истинности эквивалентности
- 14 Порядок действий в сложных логических выражениях.
- 15 Способ изменения порядка действий в логических выражениях.
- 16 Понятие, обозначение и таблица истинности штриха Шеффера
- 17 Понятие, обозначение и таблица истинности стрелки Пирса
- 18 Понятие, обозначение и таблица истинности суммы по модулю два
- 19 Закон двойного отрицания
- 20 Законы идемпотентности
- 21 Коммутативные законы
- 22 Ассоциативные законы
- 23 Дистрибутивные законы
- 24 Законы де Моргана
- 25 Законы нуля и единицы
- 26 Законы поглощения
- 27 Закон исключенного третьего и закон противоречия
- 28 Формула преобразования импликации
- 29 Формула преобразования эквивалентности

Литература:

- 1 Горбатов В. А. Дискретная математика: учебник для вузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова. - М.: АСТ, 2003. - 447 с. : рис., табл. - (Высшая школа). - Библиогр.: с.441-444.
- 2 Новиков Ф. А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб.: Питер, 2007. - 364 с.
- 3 Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. - М.: Техносфера, 2005. - 400 с.
- 4 Осипова В.А. Основы дискретной математики/В.А.Осипова – М.: ФОРУМ: ИНФА-М, 2012. – 160 с.
- 5 <http://rudocs.exdat.com/docs/index-59747.html>
- 6 <http://www.ido.rudn.ru/nfpk/inf/inf7.html>
- 7 <http://informatika.sch880.ru/p25aa1.html>
- 8 <http://window.edu.ru/library/pdf2txt/659/47659/23617>