ЛЕКЦИЯ 5

Элементы комбинаторики, теории множеств и математической логики

Основное содержание:

- Понятия множества, подмножества, универсального множества.
- Операции над множествами (пересечения множеств, объединения множеств, разности двух множеств и дополнения). Диаграммы Эйлера-Венна.
- Разбиение множества на классы.

1. Понятие множества. Подмножества

Одним из основных понятий математики является понятие множества.

Понятие множества относится к аксиоматическим понятиям математики.
Математики утверждают, что теория множеств появилась на свет более 100 лет назад благодаря Кантору. (Георг Кантор (1845-1918) - немецкий математик и философ, основоположник теории множеств).

Множество – совокупность определённых, различимых между собой объектов, рассматриваемых как единое целое, и обладающая некоторым общим свойством.

Под *множеством* понимается совокупность предметов, объединенных общим для них свойством.

Примером множества является группа студентов первого курса, лекарства, относящиеся к антибиотикам, книги по данной специальности, граждане одной национальности и т. п.

Каждый объект множества называется его *элементом* и обозначается малыми буквами латинского алфавита *a, Ь, с,..., х, у, z,* а множества элементов — большими буквами *А, В, С,X,* У, *Z.*

Например:

– множество букв русского алфавита;

– множество натуральных чисел;

– множество студентов, сидящих на 1-м ряду.

Имеется три важных момента, характеризующих понятие множества:

1) объекты, входящие во множество, определённые – т.е. для каждого объекта можно однозначно сказать, принадлежит ли он данному множеству или нет;

2) объекты, входящие во множество, различимы между собой – т.е. во множестве не может быть двух или более одинаковых объектов;

3) все объекты, входящие во множество, мыслятся как единое целое – т.е. во множестве абстрагируются от свойств отдельных объектов, но говорят об общем свойстве множества, как единого целого; такое общее свойство называют характеристическим.

Например, можно говорить о множестве всех книг данной библиотеки, множестве всех вершин данного многоугольника, множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек данной прямой.

Например, препараты, относящиеся к антидепрессантам, являются подмножеством психотропных средств.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным**, в противном случае множество называется **бесконечным**. Множество может содержать и всего лишь один элемент. Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается ∅.

Множества А и S_1, рассмотренные выше, – конечные, а множество N – бесконечное.

Принадлежность элемента множеству записывается значком ∈.

Например:

– буква «бэ» принадлежит множеству букв русского алфавита;
– буква «бета» не принадлежит множеству букв русского алфавита;
– число 5 принадлежит множеству натуральных чисел;
– число 5,5 – не принадлежит множеству натуральных чисел;
– Вольдемар не сидит в первом ряду.

Таким образом, если множество содержит конечное число элементов, то оно может быть задано **перечислением** его элементов: А = {1,2,3}

Множество может быть также задано при помощи правила (**общей характеристикой**), позволяющего определить, является ли данный объект элементом множества или нет. При записи правило, задающее множество, отделяется вертикальной чертой или двоеточием.

Например,

$A = \{x \in R / x^2 - 4 = 0\}$

Например,

1) - множество чисел, принадлежащих отрезку (подразумевается множество действительных чисел, которые перечислить через запятую уже невозможно);
2) - множество рациональных чисел, то есть, чисел, представимых в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.

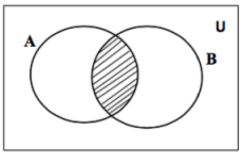
Множество В называется **подмножеством** множества А, если каждый элемент множества В одновременно является элементом множества А. Иными словами, множество В содержится во множестве А: . Значок называют *значком включения*.

Например:

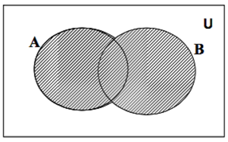
А – это множество букв русского алфавита. Обозначим через С – множество его гласных букв, которое будет подмножеством множества А. Тогда: .

Пусть заданы множества А = {1, 3, 5, 7} и В = {3, 5}. Очевидно, что В есть подмножество А, т.е. .

Множество N натуральных чисел является подмножеством множества Z целых чисел, т. е. .



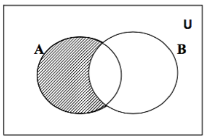
Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т. е. справедливо утверждение . Говорят, что А – самое широкое подмножество А. Пустое множество является подмножеством любого множества. Пустое множество является самым узким подмножеством любого множества.



Пример 1. Дано некоторое множество, состоящее из трёх элементов: . Найти все его подмножества.

Решение.

Во-первых, это – пустое множество ∅. Во-вторых, множества, содержащие по одному элементу: {a}, {b},{c}. В-третьих, множества, содержащие по два элемента: {a, b}, {b, c}, {a, c}. И, наконец, само множество {a, b, c}.



Ответ: ∅, {a}, {b},{c},{a, b}, {b, c}, {a, c},{a, b, c}.

Зафиксированное каким-либо образом множество объектов, допустимых при данном рассмотрении, называют **универсальным множеством** (базовым множеством, основным множеством, универсумом). Часто обозначается U.

Множества А и В считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств обозначают так: А = В.

2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна

Пересечением множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству А и множеству В. Обозначается А∩В.

Пересечение множеств A и B (пишется ***A∩B)*** есть множество элементов, каждый из которых принадлежит и ***A,*** и ***B***

Объединением множеств А и В называется такое множество, каждый элемент которого содержится хотя бы в одном из множеств А или В. Обозначается АÚВ .

Объединение множеств A и ***B*** (пишется ***A***Ú***B)*** есть множество элементов, каждый из которых принадлежит либо ***A***, либо ***B***

Разностью двух множеств А и В называется множество , содержащее лишь те элементы из А, которые не входят в В. Обозначается А****В.

Разность множеств A** и **B (пишется ***A\B)*** есть множество элементов, которые принадлежат множеству ***A,*** но не принадлежат множеству *B*

Если множество В – подмножество множества А (), то разность называется **дополнением** к В в множестве А. Обозначается .

Дополнением множества А по отношению к универсальному множеству U есть множество , составленное из всех тех элементов U, которые не находятся в А:

<u>Пример</u> Пусть даны два множества ***A*** = (2, 4, 6, 8}; **B** = {1, 2, 3, 4, 7}.

Найти ***A*** ∪**B**; ***A*** ∩ **B**; ***A* \ *B; B* \ *A.***

<u>Решение</u>

A ∪**B** = {1,2, 3,4, 6, 7, 8}; A∩B = {2,4}; A\ B = {6,8}; B\A = {1,3,7}.

Пример 2. Дано: а), А = {1;3;4;5;9}, В = {2;4;5;10}. б), А = [-3;3), В = (2;10].

Найти: А∩В, АUВ, А\В, В\А, .

Решение.

а) А∩В = {4;5}, АUВ = {1;2;3;4;5;9;10}, А \ В = {1;3;9}, В \ А = {2;10}, = Z \ B;

б) А∩В = (2;3), АUВ = [-3;10] , А\В = [-3,2], В\А = [3,10],В Z\B = (-∞,2]∪(10,+∞).

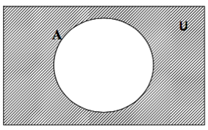
Пример 3. Пусть А – множество различных букв в слове «математика», а В – множество различных букв в слове «стереометрия». Найти пересечение и объединение множеств А и В.

Решение.

А = { м, а, т, е, и, к } В = { с, т, е, р, о, м, и, я }

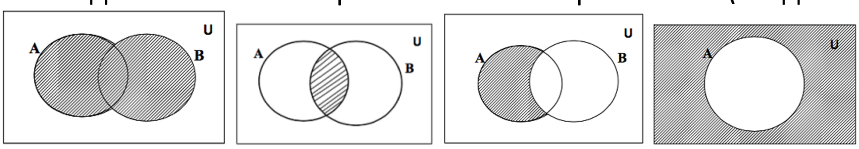
А∩В = { м, т, е, и } А ∪ В = { м, а, т, е, и, к, с, р, о, я }.

Для иллюстрации операций над множествами часто используются *диаграммы Эйлера – Венна*. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника,



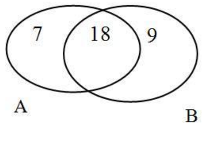
представляющего универсальное множество U , а внутри него – кругов, представляющих множества.

• объединение AUB • пересечение A∩B • разность A\B • дополнение A



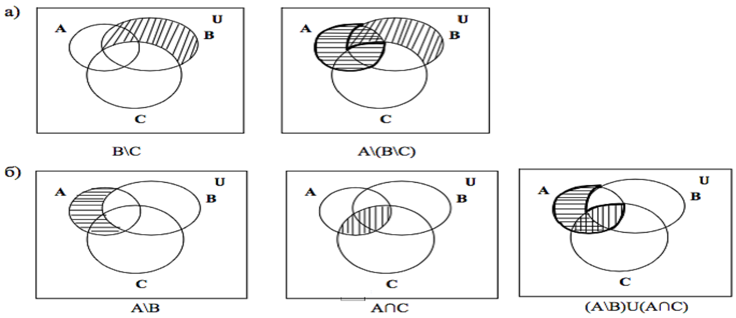
Круги, которыми изображаются множества, называются **кругами Эйлера**.

Пример 3. В классе английский язык изучают 25 человек, а немецкий – 27 человек, причем 18 человек изучают одновременно английский и немецкий языки. Сколько человек в классе: а) изучают иностранные языки? б) изучают только английский язык? в) изучают только немецкий язык?



Решение.

А - множество школьников, изучающих английский язык, В – множество школьников, изучающих немецкий язык. Изобразим эту ситуацию с помощью диаграммы. Два языка изучают 18 школьников, поставим это число в пересечение множеств А и В. Английский язык изучают 25 человек, но среди них 18 человек изучают и немецкий язык, значит, только английский язык изучают 7 человек, укажем это число на диаграмме. Аналогично, только немецкий язык изучают 27 – 18 = 9 человек. Поместим и это число на диаграмму. По диаграмме получаем: а) 7 человек, б) 9 человек, в) 7 + 18 + 9 = 34 человека.



Пример 4. Используя диаграммы Эйлера-Венна доказать тождество: A\ (B\C) = (A\B) ∪ (A ∩ C).

Решение.

Построим диаграммы:

Левая часть равенства представлена на рисунке а), правая – на рисунке б). Из диаграмм очевидно равенство левой и правой частей данного соотношения.

Разбиение множества на классы.

Говорят, что множество X разбито на попарно непересекающиеся подмножества или классы, если выполнены следующие условия:

1) любые два подмножества попарно не пересекаются;

2) объединение всех подмножеств совпадает с исходным множеством X.

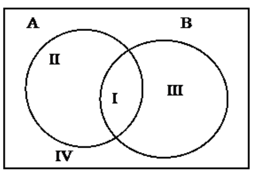
Разбиение множества на классы называют **классификацией**.

Классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множества.

Например, натуральные числа можно разбить на четные и нечетные. Буквы русского языка можно разбить на гласные и не гласные. Вообще, если на множестве X задано одно свойство A, то это множество разбивается на два класса: первый класс – объекты, обладающие свойством A, второй класс – объекты, не обладающие свойством A.

Если элементы множества обладают двумя независимыми свойствами, то все множество разбивается на 4 класса.

Например, на множестве натуральных чисел заданы два свойства: «быть кратным 2» и «быть кратным 3». При помощи этих свойств в множестве N можно выделить два подмножества A и B. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого.



Тогда в первый класс войдут числа, кратные 2 и 3, во второй – кратные 2, но не кратные 3, в третий – кратные 3, но не кратные 2, в четвертый – не кратные 2 и не кратные 3.

Пример 5. Пусть X – множество четырехугольников, A, B и C – его подмножества. Можно ли говорить о разбиении множества X на классы A, B и C, если:

а) A – множество параллелограммов, B – множество трапеций, C – множество четырехугольников, противоположные стороны которых не параллельны;

б) А – множество параллелограммов, В – множество трапеций, С – множество четырехугольников, имеющих прямой угол?

Решение.

а) Множества А, В и С попарно не пересекаются. Действительно, если у четырехугольника, противоположные стороны не параллельны, то он не может быть параллелограммом или трапецией. В параллелограмме противоположные стороны попарно параллельны, поэтому он не может принадлежать ни множеству В, ни множеству С. Наконец, в трапеции две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны, поэтому трапеция не может принадлежать ни множеству А, ни множеству С. Объединение множеств А, В и С даст все множество четырехугольников. Условия классификации выполнены, множество всех четырехугольников можно разбить на параллелограммы, трапеции и четырехугольники, противоположные стороны которых не параллельны.

б) Множества А и В не пересекаются, но множества А и С имеют общие элементы, примером может служить прямоугольник, множества В и С тоже пересекаются: общим элементом является прямоугольная трапеция. Следовательно, нарушено первое условие классификации. Не выполняется и второе условие, так как некоторые четырехугольники не попадают ни в одно из подмножеств А, В или С, таким является четырехугольник с непараллельными сторонами и непрямыми углами. В этом случае множество Х на классы А, В и С не разбивается.

Элементы комбинаторики

Комбинаторикой называется раздел математики, изучающие соединения между элементами конечных множеств с количественной точки зрения.

Название комбинаторика происходит от латинского слова «combina», что в переводе на русский означает сочетать, соединять.

6.1.2. Правило суммы

Теорема 6.1. Правило суммы *Если все изучаемые комбинации можно разбить на несколько классов так, что каждая комбинация входит в* *один и только один класс, то общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах.*

Данное утверждение настолько очевидно, что не нуждается в доказательстве. Это правило можно сформулировать иначе:

Если элементы множества A можно выбрать m способами, а элементы другого множества B можно выбрать n способами, то элементы множества «A или B», то есть суммы множеств $A + B$, можно выбрать $m + n$ способами.

Задача 6.1. На столе лежат две коробки с карандашами. В первой коробке лежат 5 карандашей, а во второй коробке — 4 карандаша. Сколько существует способов взять один карандаш со стола?

Решение. Событие A — *со стола взят один карандаш* может произойти с помощью одного из двух событий:

1) событие A_1 — *из первой коробки взят один карандаш*;
2) событие A_2 — *из второй коробки взят один карандаш.*

Так как невозможно взять один карандаш одновременно из двух коробок, то событие *со стола взят один карандаш* эквивалентно тому, что *из первой коробки взят один карандаш* **ИЛИ** *из второй коробки взят один карандаш.* Формально это можно записать так:

$$A = A_1 + A_2.$$

Так как событие *из первой коробки взят один карандаш* можно выполнить $n_1 = 5$ способами, а событие *из второй коробки взят один карандаш* — $n_2 = 4$ способами, то согласно правилу суммы 6.1 событие *со стола взят один карандаш* можно выполнить

$$N_A = n_1 + n_2$$

способами. Поэтому $N_A = 5 + 4 = 9$.

Итак, $\boxed{\text{Один карандаш со стола можно взять 9 способами}}$.

6.1.3. Правило произведения

Теорема 6.2. Правило произведения *Если элементы множества A можно выбрать m способами и если после такого выбора элементы множества B можно выбрать n способами, то элементы произведения множеств AB можно выбрать $m \cdot n$ способами.*

Так как произведение множеств по определению (6.4) есть множество пар, то для каждого первого элемента пары, выбранного с помощью m

способов можно подобрать второй элемент n способами, то множество пар будет содержать $m \cdot n$ элементов.

Задача 6.2. На столе лежат две коробки с карандашами. В первой коробке лежат 5 синих карандашей, а во второй коробке — 4 красных карандаша. Сколько существует способов взять два разноцветных карандаша со стола?

Решение. Событие B — *со стола взяты два разноцветных карандаша* может произойти с помощью одного из двух событий:

1) событие B_1 — *из первой коробки взят один синий карандаш;*
2) событие B_2 — *из второй коробки взят один красный карандаш.*

Событие *со стола взяты два разноцветных карандаша* эквивалентно тому, что *из первой коробки взят один синий карандаш* **И** *из второй коробки взят один красный карандаш.* То есть, фактически образуется множество пар $(c;\ k)$. Формально это можно записать так:

$$B = B_1 B_2.$$

Так как событие *из первой коробки взят один синий карандаш* можно выполнить $n_1 = 5$ способами, а событие *из второй коробки взят один красный карандаш* — $n_2 = 4$ способами, то согласно правилу произведения 6.2 событие *со стола взяты два разноцветных карандаша* можно выполнить

$$N_B = n_1 \cdot n_2$$

способами. Поэтому $N_B = 5 \cdot 4 = 20$. Таким образом,

$\boxed{\text{Два разноцветных карандаша со стола можно взять 20 способами}}$.

Замечание 6.2. О знании языка при решении задач комбинаторики Объединяя правила суммы и произведения, можно сформулировать общее правило, опирающееся на конструкции языка, связанные с использованием союзов «и» и «или».

Если предложение о некотором событии можно переформулировать с помощью союзов «и» и «или», связывающих соответствующие микрособытия, то Общее число исходов изучаемого события равно линейной комбинации числа исходов полученных микрособытий. При этом в составленной линейной комбинации числа исходов союзам «и» соответствует умножение, а союзам «или» — сложение.

Задача 6.3. В магазине лежат 5 книг автора A, 4 книги автора B и 3 книги автора C. Кроме этого, 6 сборников (BC) состоят из одноимённых книг авторов B и C, и 4 сборника (AC) содержат одноимённые книги авторов A и B. Сколько существует вариантов купить по одному произведению всех трёх авторов?

Решение. Введём обозначения событий, связанных с условием задачи.
Событие D – *купить по одному произведению всех трёх авторов*;
Событие A – *купить одно произведение автора* A;
Событие B – *купить одно произведение автора* B;
Событие C – *купить одно произведение автора* C;
Событие AC – *купить сборник* AC;
Событие BC – *купить сборник* BC.

Рассмотрим подробное текстовое решение задачи:
Купить по одному произведению всех трёх авторов это эквивалентно тому, что: *купить одно произведение автора A* **и** *купить одно произведение автора B* **и** *купить одно произведение автора C* **или** *купить одно произведение автора A* **и** *купить сборник BC* **или** *купить одно произведение автора B* **и** *купить сборник AC*.

Перепишем это решение в символьном виде:

$$D{=}A \textbf{ и } B \textbf{ и } C \textbf{ или } A \textbf{ и } BC \textbf{ или } B \textbf{ и } AC.$$

Далее воспользуемся замечанием 6.2, сопоставив каждому событию число его исходов:

$$N_D = n_A \cdot n_B \cdot n_C + n_A \cdot n_{BC} + n_B \cdot n_{AC}.$$

Теперь остаётся подставить численные значения соответствующих исходов:

$$N_D = 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \Rightarrow N_D = 106.$$

Выходит, что существует

$\boxed{\text{106 вариантов купить по одному произведению всех трёх авторов}}$.

В дальнейшем нам понадобится одно техническое понятие из мира вычислений целых неотрицательных чисел.

6.1.4. Понятие факториала

Определение 6.7. *Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от единицы до n включительно.*

То есть,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n.$$

(Читается: «эн факториал»). По определению полагают, что $0! = 1$.

Так, например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, то есть $3! = 6$, а $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \Rightarrow 5! = 120$.

Можно заметить, что, зная то, что $3! = 6$, $5!$ можно вычислить проще: $5! = 3! \cdot 4 \cdot 5$, что значительно позволяет уменьшить объём вычислений.

Задача 6.4. Сократить дробь $\frac{4!}{7!}$.

Решение. Так как $7! = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, то $\dfrac{4!}{7!} = \dfrac{4!}{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \dfrac{1}{210}$.

Следовательно, $\boxed{\dfrac{4!}{7!} = \dfrac{1}{210}}$.

Правила суммы и произведения являются общими правилами решения задач комбинаторики. С их помощью можно решать самые различные задачи. Но существует целый ряд задач, которые встречаются настолько часто, что есть смысл свести их решение к формулам[1].

6.1.5. Перестановки

Определение 6.8. *Перестановками во множестве из n элементов называются комбинации между* **всеми** *элементами множества, отличающиеся друг от друга порядком входящих в них элементов.*

Перестановки обозначаются символом P_n. Также обозначается и число перестановок, для которого справедлива

Теорема 6.3. $\forall n\, \boldsymbol{P_n = n!}$

Представим коробочку, содержащую n горизонтальных ячеек. Заполнив её разноцветными шариками, можно получить пример перестановки во множестве из n разноцветных шариков.

Рассмотрим процесс построения перестановки (или заполнения коробочки).

Заполнить коробочку это совершить такое событие A, которое состоит из следующих событий:

A_1: положить в коробочку первый шарик. Число способов $n_{A_1} = n$; **и**
A_2: положить в коробочку второй шарик. Число способов $n_{A_2} = n - 1$; **и**
A_3: положить в коробочку третий шарик. Число способов $n_{A_3} = n - 2$; **и**
. . . . **и**
A_{n-1}: положить в коробочку третий шарик. Число способов $n_{A_{n-1}} = 2$; **и**
A_n: положить в коробочку третий шарик. Число способов $n_{A_n} = 1$.

Таким образом, $A = A_1$ и A_2 и A_3 и ... A_{n-1} и A_n.

Согласно принципу произведения 6.2

$$P_n = N_A = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1 \Rightarrow P_n = n!$$

Замечание 6.3. С помощью этой теоремы можно интерпретировать, почему $0! = 1$: Множество, состоящее из нулевого числа элементов есть пустое множество $\emptyset$. А оно является упорядоченным единственным образом.

Перестановки являются частным случаем следующего типа комбинаций:

6.1.6. Размещения без повторения

Определение 6.9. *Размещениями без повторения называются комбинации выбора k различных элементов во множестве из n элементов, отличающиеся друг от друга по составу и порядку входящих в них элементов.* Размещения без повторения обозначаются символом A_n^k. Также обозначается и их число, для которого справедлива

Теорема 6.4. $\boldsymbol{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$

Доказательство этой теоремы полностью повторяет процесс доказательства теоремы 6.3, отличие состоит только в том, что в коробочку надо положить не n шаров, а k шаров. Поэтому

$$A_n^k = N_A = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-(k-1)).$$

А так как

$\boldsymbol{n!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-k+1)\boldsymbol{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots 2\cdot 1}$, то $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Поэтому $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Следствие 6.4. $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$

В предыдущих случаях перестановки касались различных элементов. Но так бывает не всегда.

6.1.7. Перестановки с повторениями двух типов

Теорема 6.5. *Если во множестве из n элементов существуют две группы одинаковых элементов, содержащие соответственно n_1 и n_2 элементов, то число перестановок в этом множестве*

$$\boldsymbol{P(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!}} \quad (n = n_1 + n_2).$$

Число элементов в каждой перестановке равно $n = n_1 + n_2$. Если бы все элементы во множестве были бы различными, то число перестановок $P_n = n!$ Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. Так в первой из групп существует $n_1!$ перестановок, но так как они все одинаковые, то они ничего не меняют. Точно также ничего не меняют и $n_2!$ перестановок во второй группе.

Так как перестановки в первой и второй группе не зависят друг от друга, то по правилу произведения 6.2 элементы этих групп можно переставить

$n_1!n_2!$ способами, при этом перестановка останется неизменной. Следовательно, число различных перестановок с повторениями, которые можно выполнить с элементами данного множества при условии, что $n = n_1 + n_2$,

$$P(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!}$$

Помимо множеств, состоящих из различных элементов интерес представляют и множества, состоящие из одинаковых элементов, в которых порядок расположения элементов в комбинациях роли не играет.

6.1.8. Сочетания без повторения

Определение 6.10. *Сочетаниями без повторения называются комбинации выбора k одинаковых элементов во множестве из n элементов, отличающиеся друг от друга только по составу входящих в них элементов.*

Сочетания без повторения обозначаются символом C_n^k. Также обозначается и число сочетаний, для которого справедлива

Теорема 6.6. $\boldsymbol{C_n^k = \dfrac{n!}{n!(n-k)!}}$

Выбирая k одинаковых элементов во множестве из n элементов, можно заметить, что одновременно происходит процесс «невыбора» других $n - k$ элементов, которые также можно считать одинаковыми. Поэтому множество из n элементов разбивается на две группы одинаковых элементов, состоящие из $n_1 = n$ и $n_2 = n - k$ элементов.

Следовательно, число сочетаний выбора k элементов из n без повторения совпадает с числом перестановок во множестве из двух типов элементов. А значит их число

$$C_n^k = P(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 6.4. Заметим, что данную формулу можно доказать и другим способом. Для этого этого выберем сначала все группы, содержащие k элементов, не учитывая порядок входящих в них элементов. Таких групп наберётся C_n^k. Затем в каждой такой группе рассмотрим всевозможные перестановки. Общее число перестановок в каждой группе составляет
$P_k = k!$ Тогда общее число комбинаций выбора и упорядочения равно произведению $C_n^k P_k$. Которое по определению совпадает с числом размещения k элементов без повторения во множестве из n элементов.

Поэтому $A_n^k = C_n^k P_k$. А значит $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$. То есть, $C_n^k = \dfrac{n!}{n!(n-k)!}$.

Приведём без доказательства некоторые свойства сочетаний.

Свойство 6.1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Свойство 6.2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Свойство 6.3. $C_n^1 = C_n^{n-1}$.

В заключение рассмотрим

6.1.9. Размещения с повторением

Определение 6.11. *Размещениями с повторением называются комбинации выбора k элементов во множестве элементов из n видов, отличающиеся друг от друга по составу и порядку входящих в них элементов.*

Размещения с повторением обозначаются символом $\bar{A}_n^k$. Для них справедлива следующая теорема, которую сформулируем без доказательства.

Теорема 6.7. $\boldsymbol{\bar{A}_n^k = n^k}$.

Задача 6.5. Номер телефона состоит из 11 цифр. Человек забыл три последние цифры. Сколько неудачных попыток он может совершить, набирая нужный номер?

Решение. Каждая цифра номера определяет отдельный вид. Общее их число $n = 10$. Длина комбинации, то есть нужного «слова» $k = 3$. Поэтому $\bar{A}_{10}^3 = 10^3$. То есть всего он может выполнить 1000 попыток. Но так как одна удачная, то неудачных будет 999.

Контрольные вопросы

1. Понятие множества.

2. Какое множество называется пустым?

3. Подмножество. Какое минимальное число подмножеств имеет любое непустое множество?

4. Конечные и бесконечные множества. Приведите примеры.

5. Назовите основные способы задания множеств?

6. Какое множество называется универсальным?

6. Сформулируйте определение операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметричная разность и дополнение.

7. Запишите ассоциативный, дистрибутивный и коммутативный законы операций над множествами.

Литература:

1. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред. проф. учреждений / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под ред. В.А. Гусева. – 6-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 414 с.
2. Пехлецкий И.Д.Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования/ И.Д. Пехлецкий.-10-е изд., стер.-М.: Издательский центр»Академия», 2013.-304с
3. http://diskra.ru/reshenie_zadach/?lesson=1&id=1
4. http://www.grandars.ru/student/vysshaya-matematika/mnozhestvo.html